Отзыв на диссертационную PhD работу А. Лес

Диссертационная работа состоит из четырёх разделов и посвящена исследованию задачи Зоммерфельда в $R^n, n \geq 3$ во всем прочтранстве R^n а также в цилиндрических областях.

Классическая задача Зоммерфельда. Найти решение уравнения Гельмгольца

$$-\Delta_x u - k^2 u = f(x), \quad x \in R^3 \tag{1}$$

удовлетворяющие условию излучения на бесконечности при $x_3 \to \infty$

$$|u(x)|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} + iku\right|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^2} \tag{2}$$

При решении задачи (1)–(2) Зоммерфельд использовал представление фундаментального решения уравнения (1):

$$\varepsilon_3(x, ik) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x|}}{|x|}, \tag{3}$$

Одним из главных достижений автора диссертации является построение в явном виде фундаментального решения уравнения

$$-\Delta_x u - k^2 u = f(x), \ x \in R^n, n \geq 3$$

В виде

$$\varepsilon_n(x, -ik) = \varepsilon_\Delta(|x|, -ik)\frac{(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{-ik}{2}|x|\right)^{\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(-ik|x|) \tag{4}$$

Где $K_{\frac{n-2}{2}}(z)$ – функция Макдональда.

С использованием формулы (4) показано, что условие излучения Зоммерфельда при n – нечётном $n = 2s + 3, s = 0, 1 \ldots$ принимает вид

$$|u(x)|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^{s+1}}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial n_y} - iku\right|_{|y|=d} \leq \frac{M}{d^{s+2}}, \quad d \to \infty \tag{5}$$

А при n – чётном $n = 2s, \ s = 1,2, \ldots$

$$|u(x)|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^{s+\frac{1}{2}}}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} - iku\right|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^{s+\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

Тем самым установлена зависимость условий излучения от размерности пространства $R^n, n \geq 3$ а также от чётности и нечётности n.

В случае, когда $supp\, f \subset \Omega$ – конечной области в R^n доказано, что задача Зоммерфельда (4)–(5), (4)–(6) эквивалентна потенциалу Гельмгольца:

$$u(x) = \int_{R^n} \varepsilon(|x-y|, -ik) f(y) dy \quad (7)$$

А условие излучения Зоммерфельда (5)–(6) эквивалентно граничному условию:

$$G[u]|_{x\in\partial\Omega} = -\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial\varepsilon(|x-y|,-ik)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(|x-y|,-ik)\frac{\partial u}{\partial n_y}\right] dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (8)$$

Этот результат позволяет свести задачу из пространства R^n к ограниченной области Ω. До настоящего времени аналоги задачи Зоммерфельда в цилиндрической области $D = \Omega \times (0, T)$ отсутствовали, поскольку боковые граничные условия на ∂D *были* неизвестны. Автор А. Лес, используя граничное условие потенциала на боковой поверхности цилиндра,

$$G[u]|_{x\in\partial D} = -\frac{u(x)}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \left[-\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\right) u(y)\right] dS_y = 0, \; x \in \partial D \quad (9)$$

и условие Зоммерфельда:

$$|u(x)|_{|x|=d} \le \frac{M}{|x_3|}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} - iku\right|_{|x|=d} \le \frac{M}{|x_3|^2} \quad (10)$$

При $supp f(x) = D \subset D^+$ задача полностью свели к потенциалу Гельмгольца.

Важной проблемой является решение обратной задачи — нахождение плотности $f(x)$ общего эллиптического потенциала:

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon(x-y) f(y) dy \quad (11)$$

где $\varepsilon(x-y)$- фундаментальное решение уравнения

$$L(u)\varepsilon(x,y) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon(x,y) + a(x)\varepsilon(x,y)u = \delta(x-y). \quad (12)$$

Найдено необходимое и достаточное условие разрешимости для $f(x)$

$$N[u]|_{x\in\partial\Omega} = -\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_y}(x-y)u(y) - \varepsilon(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right) dy = 0, \; x \in \partial\Omega \quad (13)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали.

Отметим, что в случае $Lu = -\Delta_x u$ условие (13) получено Т. Ш. Кальменовым.

В заключение, диссертационная работа А.К. Леса на тему «Моделирование подземных геофизических полей методами потенциала Гельмгольца»

соответствует всем требованиям, предъявляемым к присуждению степени доктора философии (PhD), А. Лес заслуживает присуждения степени доктора философии (PhD) по специальности «6D070500 — математическое и компьютерное моделирование».

Зарубежный руководитель
доктор физико-математических наук
Член-корреспондент РАН, профессор С.И. Кабанихин

Подпись Кабанихина С.И.
удостоверяю.
Рук. отдела ДОУ ИМ СО РАН
Е.Т. Кедра

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
Для документов
(ИМ СО РАН)
Россия г.Новосибирск

Лес Айдананың PhD диссертациялық жұмысына пікір

Диссертациялық жұмыс төрт бөлімнен тұрады және бүкіл кеңістіктегі $R^n, n \geq 3$ кеңістігінде, сондай-ақ цилиндрлік облыстардағы Зоммерфельд есебін зерттеуге арналған.

Классикалық Зоммерфельд есебі. Гельмгольц теңдеуінің шешімін табу:

$$-\Delta_x u - k^2 u = f(x), \quad x \in R^3 \tag{1}$$

мұндағы шешім шексіздікте $x_3 \to \infty$ кезінде сәулелену шартын қанағаттандыруы тиіс:

$$|u(x)|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} + iku\right|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^2} \tag{2}$$

(1)–(2) есебін шешу барысында Зоммерфельд (1) теңдеудің фундаментальді шешімінің келесі түрін пайдаланды.

Диссертация авторының негізгі жетістіктерінің бірі

$$\varepsilon_3(x, ik) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x|}}{|x|}, \tag{3}$$

теңдеудің іргелі шешімін айқын түрде құрған.

$$\varepsilon_n(x, -ik) = \varepsilon_\Delta(|x|, -ik)\frac{(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{-ik}{2}|x|\right)^{\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(-ik|x|) \tag{4}$$

Мұндағы $K_{\frac{n-2}{2}}(z)$– Макдональд функциясы.

(4) формуланы пайдалану арқылы n- тақ болған жағдайда, яғни $= 2s + 3, s = 0, 1 \ldots$ Зоммерфельдтің сәулелену шарты келесі түрге ие болатыны көрсетілді:

$$|u(x)|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^{s+1}}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial n_y} - iku\right|_{|y|=d} \leq \frac{M}{d^{s+2}}, \quad d \to \infty \tag{5}$$

Ал n - жұп болған жағдайда, яғни $n = 2s, \ s = 1,2, \ldots$ сәулелену шарты төмендегі түрде жазылады:

$$|u(x)|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^{s-\frac{1}{2}}}, \ \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} - iku\right|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^{s+\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

Осылайша, сәулелену шарттарының $R^n, n \geq 3$ кеңістігінің өлшемділігіне, сондай-ақ n -нің жұп немесе тақ болуына тікелей тәуелді екендігі дәлелденді. $supp\ f \subset \Omega$ болғанда, мұндағы R^n — шекті облыс, Зоммерфельд есебі (4)–(5), (4)–(6) Гельмгольц потенциалына эквивалент екені дәлелденді:

$$u(x) = \int_{R^n} \varepsilon(|x-y|, -ik) f(y) dy \qquad (7)$$

Ал Зоммерфельдтің сәулелену шарттары (5)–(6) келесі шекаралық шартқа эквивалент:

$$G[u]|_{x\in\partial\Omega} = -\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial\varepsilon(|x-y|,-ik)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(|x-y|,-ik) \frac{\partial u}{\partial n_y} \right] dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega \qquad (8)$$

Бұл нәтиже есепті бүкіл R^n кеңістігінен шектеулі Ω облысына көшіруге мүмкіндік береді.

Осы уақытқа дейін цилиндрлік облыстағы $D = \Omega \times (0, T)$ Зоммерфельд есебінің аналогтары болған жоқ, себебі ∂D бүйір бетінде шекаралық шарттар белгісіз еді. А. Лес цилиндрдің бүйір бетіндегі потенциалдық шекаралық шартты:

$$G[u]|_{x\in\partial D} = -\frac{u(x)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[-\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) u(y) \right] dS_y = 0, \; x \in \partial D \qquad (9)$$

және Зоммерфельд шартын

$$|u(x)|_{|x|=d} \le \frac{M}{|x_3|}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial |x|} - iku \right|_{|x|=d} \le \frac{M}{|x_3|^2} \qquad (10)$$

пайдалана отырып, $suppf(x) = D \subset D^+$ болған жағдайда есеп толықтай Гельмгольц потенциалына келтірілді. Маңызды мәселелердің бірі — жалпы эллиптикалық потенциалдың тығыздығын анықтауға арналған кері есепті шешу:

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon(x-y) f(y) dy \qquad (11)$$

мұндағы $\varepsilon(x-y)$— келесі эллиптикалық теңдеудің фундаментальді шешімі:

$$L(u)\varepsilon(x,y) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon(x,y) + a(x)\varepsilon(x,y)u = \delta(x-y). \qquad (12)$$

$f(x)$ - функциясы үшін шешімділіктің қажетті және жеткілікті шарты табылды:

$$N[u]|_{x\in\partial\Omega} = -\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_y}(x-y)u(y) - \varepsilon(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dy = 0, \; x \in \partial\Omega \qquad (13)$$

мұндағы $\frac{\partial}{\partial n}$ - нормаль бойынша туынды.

Айта кету керек, $Lu = -\Delta_x u$ болған жағдайда (13) шартын алғаш рет Т.Ш. Кальменов алған.

Қорытындылай келе, А.Қ. Лестің «Гельмгольц потенциалы әдістерімен жерасты геофизикалық өрістерін модельдеу» тақырыбындағы диссертациялық жұмысы философия докторы (PhD) дәрежесін беру үшін қойылатын барлық талаптарға толық сәйкес келеді, ал А. Лес «6D070500 — математикалық және компьютерлік модельдеу» мамандығы бойынша философия докторы (PhD) дәрежесін алуға лайық.

Шетелдік ғылыми кеңесші,
физика-математика ғылымдарының докторы,
РҒА корреспондент-мүшесі, профессор
С.И. Кабанихин /қолы қойылған/ /мөр бар/